Es. 1:

$\mathfrak{sl}(n)$: $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$

$\mathfrak{sp}(2n)$: $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i, j\}$ $\qquad i,j \in \{1, \dots, n\}$

(i segni $\pm$ sono tutti scelti in modo indipendente gli uni dagli altri)

$\mathfrak{so}(2n)$ $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j\}$

$\mathfrak{so}(2n+1)$ $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$

$$\mathfrak{so}(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\tilde{A} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{A} = \text{trasp. di } A \text{ rispetto alla diag. second.} \\ B, C \text{ antisimm. } \text{——}, \text{——} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} A & v & B \\ \hline w & 0 & -{}^t v \\ \hline C & -{}^t w & -\tilde{A} \end{array}\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{——} / \text{——} \\ v, w \text{ qualsiasi} \end{array} \right\}$$

Es. n. 2:

$H \subseteq L$ sottoalg. torale massimale

$\tilde{H} = \pi_1(H) \oplus \dots \oplus \pi_t(H)$ è una sottoalg. torale, perché

$L \to L_i \subseteq \mathfrak{gl}(L_i)$ è una rappresentazione, e

$x \mapsto ad(x)|_{L_i} : L_i \to L_i$

$\tilde{H}$ contiene H, quindi $H = \pi_1(H) \oplus \dots \oplus \pi_t(H)$ da cui

$\pi_i(H) = H \cap L_i$.

Da questo, se $H \cap L_i \subseteq K_i \subseteq L_i$ con $K_i \subseteq L_i$ s. alg. torale,

allora $\pi_1(H) \oplus \dots \oplus \pi_{i-1}(H) \oplus K_i \oplus \pi_{i+1}(H) \oplus \dots \oplus \pi_t(H)$ è torale

e contiene H, quindi $K_i = \pi_i(H) = H \cap L_i$.

Es. 3: Se un $x \in L$ non è in H, lo decomp. in

$$x = \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{y} + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha e_\alpha \qquad e \qquad [h, x] = 0 + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha \alpha(h) e_\alpha ,$$

se è in H $\forall h \in H$ allora $c_\alpha = 0$ $\forall \alpha$.

Es. 4: Sia $H \subseteq L$ s. alg. torale mass., allora $H \subsetneq L$, e

c'è almeno una radice α, quindi c'è almeno una sottoalg. $S_\alpha \subseteq L$ isom. a $sl(2)$

Es. 5: 1, 2: v. es. 4. Sia $\alpha \in \Phi$.

4, 5 $L \supseteq S_\alpha$. Se $\Phi = \{\pm\alpha\}$ allora $\dim(H) = 1$, $\dim L = 3$, assurdo. Se $\exists \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ allora L contiene almeno L_β, $L_{-\beta}$, e $k t_\beta$ non cont. in S_α, $\dim(L) \geq \dim(S_\alpha) + 3 = 6$

7: $\dim(L) = \dim(H) + 2\underbrace{\left(\frac{|\Phi|}{2}\right)}_{\in \mathbb{Z}}$ con $\frac{|\Phi|}{2} \geq \dim(H)$ (perché $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$, e Φ genera H^*)

Segue: $\dim(L) \geq 3\dim(H)$ e
$\dim(L)$, $\dim(H)$ hanno stessa parità.

$\dim(H) = 1 \Rightarrow \dim(L) = 3$

$\dim(H) = 2 \Rightarrow \dim(L) =$ pari

$\dim(H) = 3 \Rightarrow \dim(L) \geq 9$

Es. 6: V. es. 5). $\underbrace{sl(2) \oplus \_\_ \oplus sl(2)}_{n \text{ volte}}$

Es. 7: 1) Dim. che H è abeliana mass.: sia $x \in L$, scriviamo x con le entrate $a_1(x), a_2(x), n_1(x), \dots, n_{12}(x)$.

Abb.: $\forall i \in \{1, \dots, 12\}$ esiste $h_i \in H$ tale che

$n_i([h_i, x]) = n_i(x)$

ad es. per n_1 prendiamo $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

cioè $a_1(h_1) = 1$, $a_2(h_2) = 0$.

Se $[h_i, x] = 0$ allora $n_i(x) = 0$, e questo $\forall x$. Quindi se $[x, H] = 0$ allora $x \in H$.

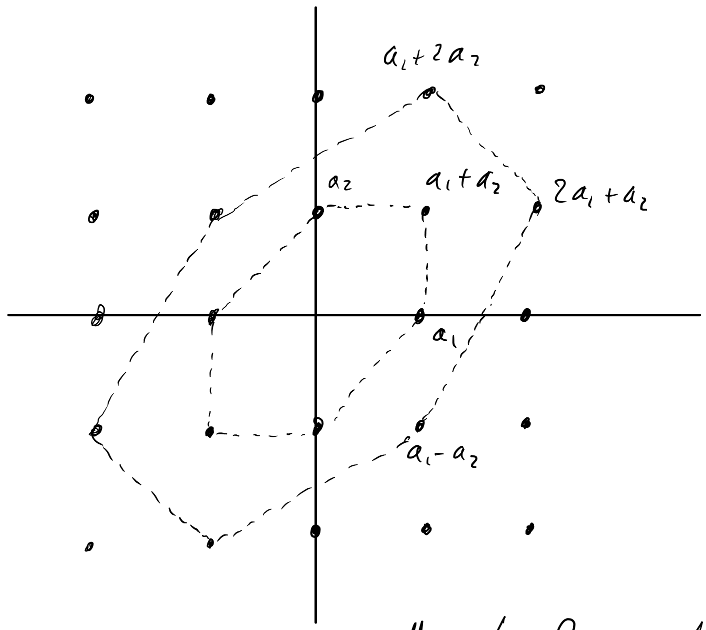
2) Gli $ad(H)$-autovett. si ottengono mettendo a zero a_1, a_2, e tutti gli n_j tranne uno, e ponendo ad es. $n_i = 1$.

Denotiamo con α_1 il funzionale $h \mapsto a_1(h)$ e con α_2 il funzionale $h \mapsto a_2(h)$. Allora le radici sono:

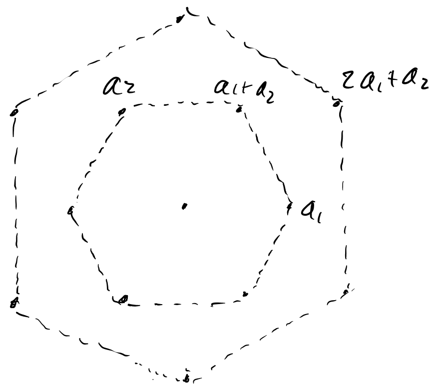
i	radice
1	$a_1 + 2a_2$
2	$a_1 - a_2$
3	$2a_1 + a_2$
4	a_1
5	$a_1 + a_2$
6	a_2

i	radice
7	$-a_2$
8	$-a_1 - a_2$
9	$-a_1$
10	$-2a_1 - a_2$
11	$a_2 - a_1$
12	$-a_1 - 2a_2$

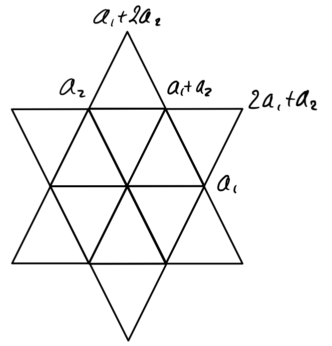
La figura corrisp. in $\mathbb{R}^2$ è fatta dai vertici di due esagoni:



Questo disegno però non rispetta la forma di Killing fra le radici. Andrebbe deformato, e si otterrebbero due esagoni regolari:



Più precisamente, la figura è ottenuta con tutti triangoli equilateri:



Es. 8: Sia $c \in \mathbb{R}$ $(c \neq 0)$ e $\beta = c\alpha \in \Phi$. Allora $\dfrac{2(c\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2c \in \mathbb{Z}$, quindi

$c = \frac{n}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Per lo stesso ragionam. con α e β scambiate otteniamo $\frac{1}{c} = \frac{m}{2}$ con $m \in \mathbb{Z}$,

allora $\dfrac{nm}{4} = 1$, $nm = 4$. Poss. supporre $n, m, c > 0$, e allora:

$n = m = 2$, da cui $\beta = \alpha$

$n = 4$, $m = 1$, da cui $c = 2$, $\beta = 2\alpha$, assurdo.

$n = 1$, $m = 4$, da cui $c = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2\beta$, assurdo.

Es. 9: $E' \subseteq E$ sottosp., $s_\alpha(E') = E'$. Supp. $\alpha \notin E'$, e consid.

$\beta \in E'$: $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E' \Rightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E$, visto che

α non è in E' concludiamo $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ $\forall \beta \in E'$!